

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Ректор

Д.А. Ендовицкий

19.01.2024



**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
ПО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ –
ПРОГРАММЕ ПОДГОТОВКИ НАУЧНЫХ И НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КАДРОВ В
АСПИРАНТУРЕ
ПО ГРУППЕ НАУЧНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ**

**1.1 Математика и механика
(факультеты – математический;
прикладной математики, информатики и механики)**

Научные специальности

- 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ
- 1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика
- 1.1.8 Механика деформируемого твердого тела

Содержание программы

Общие вопросы

- 1) Понятие топологического пространства. Непрерывные отображения топологических пространств. Компактность в топологических пространствах.
- 2) Понятие метрического пространства. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений и его применения.
- 3) Мера Лебега. Измеримые функции и их свойства.
- 4) Интеграл Лебега и его основные свойства.
- 5) Предельный переход под знаком интеграла Лебега.
- 6) Гильбертовы пространства. Ортогональные системы функций.
- 7) Полные системы, критерий полноты. Неравенство Бесселя. Сходимость рядов Фурье в гильбертовом пространстве. Равенство Парсеваля.
- 8) Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. Теоремы Фредгольма.
- 9) Линейные пространства и их подпространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Системы линейных уравнений. Теорема Кронеккера-Капелли.
- 10) Линейные отображения в линейных пространствах. Собственные векторы и собственные значения. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.
- 11) Группы. Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Фактор-группа. Теорема о гомоморфизме.
- 12) Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
- 13) Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами.
- 14) Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, их классификация. Постановка основных начально-краевых задач для волнового уравнения, теплопроводности и уравнения Лапласа.
- 15) Элементарные функции комплексного переменного и связанные с ними конформные отображения. Дробно-линейные функции.
- 16) Простейшие многозначные функции.
- 17) Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру.
- 18) Интеграл Коши.
- 19) Ряд Тейлора.
- 20) Ряд Лорана.
- 21) Изолированные особые точки аналитических функций.
- 22) Понятие о простейшей проблеме вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

- 23) Схема Бернулли. Теорема Муавра-Лапласа.
- 24) Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.
- 25) Механика сплошной среды. Феноменологический метод описания свойств реальной среды. Деформируемые среды. Деформируемые тела как подвижные материальные континуумы. Закон движения континуума. Лагранжев и Эйлеров способы описания движения сплошной среды. Индивидуальная и местная производные по времени. Траектории и линии тока. Система отсчета и сопутствующая система.
- 26) Тензоры Грина, Альманси, Коши. Уравнения совместности деформаций.
- 27) Тензор напряжений. Главные значения тензора напряжений.
- 28) Теория упругости. Три типа задач теории упругости. Постановка задач теории упругости в перемещениях и в напряжениях. Уравнения Ламе. Уравнения Бельтрами-Митчелла. Теорема единственности.
- 29) Плоская задача теории упругости. Плоское напряженное состояние. Плоская деформация. Математическая постановка плоской задачи. Функция напряжений Эри. Действие на границу полуплоскости сосредоточенной силы. Кручение призматических тел.
- 30) Понятие о динамических задачах МСС. Волны сильные и слабые. Соотношения на фронте сильных упругих волн. Скорости распространения упругих волн. Закономерности распространения продольных и поперечных волн. Волны Релея, Лява.
- 31) Отражение и преломление волн. Теория пластичности. Поверхность нагружения. Геометрическая интерпретация. Условия пластичности Треска и Мизеса. Ассоциированный закон пластического течения. Теоремы предельного равновесия. Полное решение. Плоская деформация. Соотношения Генки и Гейрингер. Разрывные решения. Кручение. Песчаная аналогия. Сложные пластические среды. Соотношения Прандтля-Рейса. Учет упрочнения, сжимаемости, вязкости.
- 32) Устойчивость. Разрушение. Задача Эйлера. Статический и динамический методы. Теорема Дирихле-Лагранжа. Парадокс Николаи. Основы трехмерной линеаризированной теории устойчивости. Основные понятия о разрушении конструкций. Критерии разрушения, энергетический, силовой, деформационный; разрушение с позиции теории устойчивости.
- 33) Механика композитных материалов. Общие понятия о композитах. Внутренняя геометрия. Классификация подходов к описанию композитов. Эффективные модули упругости микронеоднородных материалов. Макроскопические характеристики материалов различной структуры (зернистые, волокнистые, слоистые).

Специальные вопросы

1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

- 34) Равномерная сходимость последовательностей функций и функциональных рядов.
- 35) Интеграл Римана. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функции по Риману.
- 36) Тригонометрические ряды Фурье, их сходимость.
- 37) Нормированные пространства. Банаховы пространства.
- 38) Три основных принципа линейного функционального анализа (теоремы Хана-Банаха, принцип равномерной ограниченности, теорема Банаха об обратном отображении).
- 39) Компактные (вполне непрерывные) самосопряженные операторы. Теорема Гильберта.
- 40) Преобразование Фурье в пространствах L^1 и C .
- 41) Принцип максимума модуля для аналитических функций.
- 42) Теорема единственности для аналитических функций.

1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика

- 43) Равномерная сходимость последовательностей функций и функциональных рядов.
- 44) Интеграл Римана. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функции по Риману.
- 45) Тригонометрические ряды Фурье, их сходимость.
- 46) Нормированные пространства. Банаховы пространства.
- 47) Три основных принципа линейного функционального анализа (теоремы Хана-Банаха, принцип равномерной ограниченности, теорема Банаха об обратном отображении).
- 48) Компактные (вполне непрерывные) самосопряженные операторы. Теорема Гильберта.
- 49) Преобразование Фурье в пространстве L^1 .
- 50) Принцип максимума модуля для аналитических функций.
- 51) Теорема единственности для аналитических функций.

1.1.8 Механика деформируемого твердого тела

- 52) Модели сложных сред. Идеальные классические тела.
- 53) Простейшие модели сложных сред (EVPe)
- 54) Определяющие соотношения. Определяющие соотношения сжимаемых EVPe сред.
- 55) Соотношения теории пластичности Генки. Соотношения теории пластичности Ильюшина.
- 56) Поверхности разрыва напряжений и скоростей перемещений в пластических телах.
- 57) Основы теории ползучести.
- 58) Основные результаты экспериментального кручения ползучести при одноосном растяжении. Ползучесть и релаксация напряжений.
- 59) Кривые ползучести. Технические теории ползучести. Основные понятия.
- 60) Теория старения. Теория течения. Теория упрочнения. Теория ползучести с анизотропным упрочнением.

Контрольно-измерительные материалы

Контрольно-измерительный материал № 1

1. Понятие топологического пространства. Непрерывные отображения топологических пространств. Компактность в топологических пространствах.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Существует ли решение уравнения $y'' = y$, удовлетворяющее условиям $y(-35) = 1$, $y(41) = 1$ одновременно.

3. Равномерная сходимость последовательностей функций и функциональных рядов. Сходится ли равномерно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ на множестве $(0; +\infty)$?

Контрольно-измерительный материал № 2

1. Линейные пространства и их подпространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Системы линейных уравнений. Теорема Кронеккера-Капелли.

2. Ряд Тейлора. Раскладывается ли функция $f(x) = e^{-\frac{1}{(x-1)^4}}$, если $x \neq 1$, и 0 в противном случае, в окрестности точки $x_0 = 1$?

3. Компактные (вполне непрерывные) самосопряженные операторы. Теорема Гильберта. Пусть $X = Y = \ell_2$. Для $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$ положим $y = Ax = (y_1, y_2, \dots)$, где $y_k = 0$, если k нечетное, и $y_k = x_{k-1}$, если k четное. Доказать, что A^2 вполне непрерывен. Будет ли A вполне непрерывен?

Контрольно-измерительный материал № 3

1. Линейные отображения в линейных пространствах. Собственные векторы и собственные значения. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.

2. Ряд Лорана. Допускает ли функция $f(z) = \frac{z^2}{\sin(1/z)}$ в окрестности точки $z = 0$? Если да, то написать разложение, если нет — указать причину.

3. Три основных принципа линейного функционального анализа (теоремы Хана-Банаха, принцип равномерной ограниченности, теорема Банаха об обратном отображении). В пространстве \mathbb{R}^2 (с евклидовой нормой) с элементами $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ на подпространстве $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 0\}$ задан линейный функционал $\langle x, f \rangle = x_1$. Найти функционал, который является продолжением функционала f на все \mathbb{R}^2 с сохранением нормы.

Рекомендуемая литература

- 61) Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : учебник для бакалавров : [для студ. вузов, обуч. по естественнонауч. и техн. направлениям и специальностям] / Л.Д- Кудрявцев ; Моск. физ.-техн. ин-т (Гос. ун-т) .– Москва : Юрайт, 2012.
- 62) Курош, Александр Геннадиевич. Курс высшей алгебры : [учебник для студ. вузов, обуч. по специальностям "Математика", "Прикладная математика"] / А.Г. Курош .– Изд. 19-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2013 .– 431 с
- 63) Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии - М.: Наука, 1985.
- 64) Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ижевск РХД, 2000.
- 65) Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики / М.: Физматлит, 2003.
- 66) Колмогоров А. Н., Фомин СВ. Элементы теории функций и функционального анализа - М.: Физматлит, 2006.
- 67) Мальцев А. И. Основы линейной алгебры - М: Лань, 2009.
8. Маркушевич А.И. Введение в теорию аналитических функций. В 2т. - М: Наука, 1978.
- 68) Никольский С. М. Курс математического анализа. В 2 т. - М.: Физматлит, 2001.
- 69) Петровский И. Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям - М.: Наука, 1984.
- 70) Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными - М.: Наука, 1970.
- 71) Понтрягин Л. С Обыкновенные дифференциальные уравнения – М.: Наука, 1974.
- 72) Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного - М.: Лань, 2009.
- 73) Рашевский П. К. Дифференциальная геометрия - М.: URSS, 2008.
- 74) Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. - М.; Мир, 1984.
- 75) Боровков А.А. Математическая статистика - М.: Физматлит. 2007.
- 76) Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2-х т. / Л.И.Седов.- М.: Наука, 2004
- 77) Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н.Работнов. - М: Наука, 1988.
- 78) Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев, - М.: Физматлит, 2001.
- 79) Lurie A.I. Theory of Elasticity. Springer. Berlin. 2005. 1050 p.
- Список рекомендованных источников по специальной части**
- 80) Колмогоров А.Н., Фомин СВ. Элементы теории функций и функционального анализа - М.: Физматлит, 2006.
- 81) Маркушевич А.И. Введение в теорию аналитических функций. В 2 т. - М.: Наука, 1978.
- 82) Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе - Новосибирск: Наука, 1979.
- 83) Ботт Р., Ту Л. Дифференциальные формы в алгебраической топологии - М.: Наука, 1989.
- 84) Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях- М.: Мир, 1997.
- 85) Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия - М.: URSS, 2006.

- 86) Антипова И.А., Бушуева Н.А., Знаменская О.В., Цих А.К. Кратное интегрирование. Гомологии и когомологии - УМКД, СФУ, Красноярск. 2007.
- 87) Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Т. 1,2 - М.: Физматлит, 2001.
- 88) Кытманов А.М. Интеграл Бохнера - Мартинелли и его применения - Новосибирск: Наука, 1992.
- 89) Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2-х т. / Л.И.Седов.- М.: Наука, 2004.
- 90) Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н.Работнов. - М: Наука, 1988.
- 91) Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев, - М.: Физматлит, 2001.
- 92) Lurie A.I. Theory of Elasticity. Springer. Berlin. 2005. 1050 p.

Экзамен проходит в письменной форме. Билет содержит три вопроса: два из общей части и один из специальной.

Критерии оценки знаний претендентов на поступление в аспирантуру

Оценка	Критерии оценки
91-100 баллов	<ol style="list-style-type: none"> 1. Дает развернутый и правильный ответ на поставленные в экзаменационном билете и дополнительные вопросы. 2. Излагает материал в логической последовательности, грамотным научным языком. 3. Показывает навыки практического использования приобретенных знаний, а также знание источников.
61-90 баллов	<ol style="list-style-type: none"> 1. Дает недостаточно глубокие ответы на поставленные в экзаменационном билете и дополнительные вопросы. 2. Допускает несущественные ошибки в изложении теоретического материала, самостоятельно исправленные после дополнительного вопроса экзаменатора.
30-60 баллов	<ol style="list-style-type: none"> 1. Дает ответы, содержащие основную суть, но при этом допускаются существенные ошибки. 2. Испытывает затруднения при ответе на вопросы экзаменаторов. Требуется уточняющие и наводящие вопросы 3. Демонстрирует нарушение логики изложения.
29 баллов и менее	<ol style="list-style-type: none"> 1. Обнаруживает незнание или непонимание наиболее существенной части вопросов по экзаменационному билету или дополнительным вопросам экзаменатора. 2. Допускает существенные ошибки, которые не может исправить с помощью наводящих вопросов экзаменатора. 3. Демонстрирует грубое нарушение логики изложения.

Программа вступительного испытания одобрена решением Ученого совета математического факультета (от 26.12.2023 протокол № 0500-9)