

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ



Председатель приемной комиссии

Ректор

Д.А. Ендовицкий

27 октября 2023

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПРИ ПРИЕМЕ  
НА ОБУЧЕНИЕ ПО ПРОГРАММАМ МАГИСТРАТУРЫ**

**01.04.03 Механика и математическое моделирование**

Воронеж

2023

Программа разработана на основе ФГОС высшего образования по программе бакалавриата 01.03.03 Механика и математическое моделирование.

Объектами профессиональной деятельности магистра механики являются научно-исследовательские центры, промышленное производство, образовательные учреждения. Магистр подготовлен преимущественно к выполнению исследовательской деятельности в областях, использующих математические методы и компьютерные технологии; к созданию и использованию математических моделей процессов и объектов; к разработке эффективных математических методов решения задач естествознания, техники; программно-информационному обеспечению научно-исследовательской, проектно-конструкторской и эксплуатационно-управленческой деятельности; преподаванию цикла механических, математических и компьютерных дисциплин. Магистр подготовлен к деятельности, требующей углубленной фундаментальной и профессиональной подготовки, в том числе, к научно-исследовательской работе, а при условии освоения соответствующей образовательно-профессиональной программы педагогического профиля – к педагогической деятельности.

**Вступительное испытание по дисциплине «Прикладная математика и механика»**  
**Форма вступительного испытания: письменный экзамен**

**1. Составители:**

Заведующий кафедры МиКМ, д.ф.-м.н., профессор Ковалев Алексей Викторович,  
Доцент кафедры МиКМ, к.ф.-м.н., Яковлев Александр Юрьевич.

**2. Основные знания, умения и навыки, которыми должен обладать поступающий:**

Поступающий должен знать:

Основные определения, теоремы с доказательством по дисциплинам: математический анализ, алгебра и геометрия, дифференциальные уравнения, ТВиМС, УМФ, численные методы, методы оптимизации.

Основные математические модели механики (материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело (АТТ), Основные понятия механики (сила, момент силы, перемещение, скорость, ускорение, законы равновесия системы сил). Закономерности вычисления скорости и ускорения материальной точки и точек абсолютно твердого тела. Законы движения материальной точки и системы материальных точек. Математические модели движения АТТ. Закономерности движения искусственных спутников Земли (ИСЗ). Уравнения движения системы материальных точек в инвариантном виде (в обобщенных координатах). Дифференциальные вариационные принципы. Интегральные вариационные принципы движения системы материальных точек. Основные концепции и проблемы механики сплошных сред, включающих в себя теорию упругости, теорию пластичности, гидромеханику.

Уметь применять основные методы и модели при решении задач теоретической механики и механики сплошной среды. Использовать основные понятия механики при формулировке задач механики. Строить уравнения равновесия системы сил, пользуясь уравнениями или вариационными принципами. Стоить уравнения движения материальной точки и решать их. Составлять уравнения движения конкретного АТТ. Составлять уравнения движения системы материальных точек в форме Лагранжа и Гамильтона. Давать формулировку дифференциальных или интегральных вариационных принципов для конкретных случаев. Подготавливать исходные данные для численного решения на ЭВМ

и использованием стандартных программ типа Рунге – Кутта задач о движении конкретных систем материальных точек.

### **3. Программа по дисциплине. Название разделов и тематический план**

#### **Названия разделов**

1. Математический анализ
2. Геометрия и алгебра. Аналитическая геометрия.
3. Дифференциальные уравнения.
4. Теория вероятностей и математическая статистика
5. Уравнения математической физики.
6. Методы оптимизации.
7. Численные методы.
8. Статика.
9. Кинематика.
10. Динамика точки.
11. Динамика систем материальных точек.
12. Основные понятия и теоремы механики сплошной среды.
13. Теория упругости.
14. Теория пластичности.
15. Устойчивость.
16. Пластины и оболочки.
17. Методы сопротивления материалов.
18. Гидромеханика.
19. Молекулярная физика и термодинамика.

#### **Тематический план**

1. Числовые последовательности и их пределы. Нахождение частичных пределов последовательностей.
2. Предел функции одной переменной. Вычисление пределов.
3. Непрерывные функции одной переменной. Точки разрыва функции и их классификация. Понятие равномерной непрерывности функции на множестве.
4. Понятие производной. Дифференцирование сложной функции, обратной функции и функции, заданной параметрически. Производные высших порядков и их вычисление.
5. Формула Тейлора. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Использование разложений для вычисления пределов функций.
6. Экстремумы функций одной переменной. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке. Нахождение точных граней функции на множестве.
7. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла. Интегрирование подстановкой и интегрирование по частям.
8. Определенный интеграл Римана и его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Геометрические приложения определенного интеграла.
9. Несобственные интегралы. Признаки сходимости несобственных интегралов. Замена переменной в несобственном интеграле. Формула интегрирования по частям.

10. Числовые ряды. Признаки сходимости числовых рядов. Оценка для остатка ряда лейбницевского типа.
11. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Признаки Вейерштрасса и Дирихле-Абеля равномерной сходимости функциональных рядов. Основные свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов.
12. Степенные ряды и их основные свойства. Теорема Коши-Адамара. Нахождение промежутка сходимости степенного ряда.
13. Ряд Фурье абсолютно интегрируемой функции. Разложение функций в ряд Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
14. Функции  $n$  переменных и их пределы. Вычисление пределов. Повторные пределы.
15. Непрерывные функции  $n$  переменных. Понятие равномерной непрерывности функции  $n$  переменных на множестве.
16. Частные производные и их вычисление. Частные производные высших порядков. Понятие дифференцируемости для функции  $n$  переменных. Дифференциал. Дифференцируемость композиции. Дифференциалы высших порядков. Производная по направлению.
17. Формула Тейлора для функций  $n$  переменных.
18. Экстремумы функций  $n$  переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на множестве.
19. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
20. Неявные функции. Нахождение производных функций, заданных неявно.
21. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода и их вычисление. Восстановление функции по ее дифференциалу.
22. Двойные интегралы и их вычисление. Формула Грина. Замена переменных в двойном интеграле.
23. Тройные интегралы и их вычисление. Замена переменных в тройном интеграле.
24. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода и их вычисление.
25. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса.
26. Матрица, действия над матрицами, обратная матрица, определитель квадратной матрицы, минор, алгебраическое дополнение, базисный минор, ранг матрицы.
27. Линейное пространство, линейная зависимость (независимость) системы векторов, базис, координаты, матрица перехода от одного базиса к другому, связь координат вектора в разных базисах, размерность. Линейная оболочка, подпространство, сумма и пересечение подпространств, прямая сумма подпространств.
28. Системы линейных уравнений, общее решение, фундаментальная система решений, решение системы линейных уравнений методом Гаусса.
29. Евклидово и унитарное пространство, скалярное произведение, евклидова норма вектора, ортонормированная система векторов, процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
30. Линейный оператор, матрица линейного оператора, изменение матрицы линейного оператора при изменении базисов. Собственные векторы и собственные значения оператора, характеристический многочлен.
31. Сопряженный оператор, самосопряженный оператор.
32. Билинейные и квадратичные формы, матрица квадратичной формы, положительный и отрицательный индексы инерции, положительно или отрицательно определенная форма, приведение квадратичной формы к каноническому виду, критерий Сильвестра.
33. Обыкновенное дифференциальное уравнение и его решение; общее решение; частное решение; порядок дифференциального уравнения.

34. Дифференциальное уравнение первого порядка; уравнение, разрешенное относительно производной; задача Коши (начальная задача); замена переменных в дифференциальном уравнении; уравнения с разделяющимися переменными, линейные (однородные, неоднородные, метод вариации произвольных постоянных); в полных дифференциалах; Бернулли и Риккати.
35. Линейные уравнения  $n$ -го порядка, линейные уравнения  $n$ -го порядка однородные, неоднородные; задача Коши; фундаментальная система решений; определитель Вронского; метод вариации произвольных постоянных; характеристическое уравнение; квазиполином, метод неопределенных коэффициентов, резонансный и нерезонансный случаи, краевая задача.
36. Устойчивость по Ляпунову, неустойчивость, асимптотическая устойчивость; критерий Рауса-Гурвица; положение равновесия (точка покоя, особая точка) системы; система первого приближения.
37. Случайные величины дискретного и непрерывного типов. Случайные векторы. Функции случайных величин. Функции распределения, ряд распределения, плотность вероятностей и их свойства. Независимость случайных величин.
38. Математическое ожидание и его свойства. Дисперсия и ее свойства. Начальные и центральные моменты. Корреляционный момент, коэффициент корреляции. Корреляционная матрица.
39. Законы распределения: нормальный (гауссовский), равномерный, экспоненциальный (показательный), Релея, Пуассона, биномиальный (Бернулли).
40. Генеральная совокупность, выборка, выборочные значения. Статистика, эмпирическая функция распределения.
41. Точечная оценка параметра распределения генеральной совокупности. Несмещенность, эффективность, состоятельность.
42. Методы нахождения точечных оценок: максимального правдоподобия, метод моментов.
43. Проверка гипотезы о виде функции распределения: критерий согласия  $\chi^2$  - Пирсона, критерий согласия Колмогорова.
44. Задача на собственные значения, задача Штурма-Лиувилля, собственные значения, собственные функции, свойства собственных функций и собственных значений. Общая схема решения начально-краевых задач методом Фурье для параболических и гиперболических уравнений. Применение метода Фурье к решению краевых задач для уравнения Лапласа.
45. Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Каноническая задача. Графическое решение ЗЛП. Базисные точки (опорные планы) ЗЛП. Оптимальные точки (решения) ЗЛП. Оценки векторов-столбцов. Симплекс-метод. Метод искусственного базиса. М-метод. Вырожденные ЗЛП. Двойственная задача, правила построения. Основные свойства двойственных задач.
46. Задача безусловной оптимизации. Методы спуска: направление движения, величина шага. Метод градиентного спуска, метод наискорейшего спуска.
47. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнения Эйлера. Задача Больца. Условие трансверсальности.
48. Итерационный метод решения скалярных уравнений. Достаточное условие сходимости итерационного метода. Решение скалярных уравнений и систем скалярных уравнений методом Ньютона. Оценка погрешности метода Ньютона.
49. Метод Гаусса (схема единственного деления). Метод Гаусса с выбором главного элемента. Матрица отражения. Метод отражений. Метод простой итерации для решения линейных систем. Достаточное условие сходимости метода простой итерации, оценка погрешности метода простой итерации. Необходимое и достаточное условие сходимости метода простой итерации.

50. Интерполяционный многочлен. Построение интерполяционного многочлена методом неопределенных коэффициентов. Многочлен Лагранжа. Формула для погрешности интерполяции. Конечные и разделенные разности. Многочлен Ньютона.
51. Понятие о формуле численного дифференцирования (о разностной аппроксимации производной). Построение разностных аппроксимаций производных методом неопределенных коэффициентов. Построение разностных аппроксимаций производных интерполяционным методом. Остаточный член формулы численного дифференцирования (погрешность разностной аппроксимации производной).
52. Понятие об интерполяционной квадратурной формуле. Интерполяционные квадратурные формулы с равноотстоящими узлами: формулы центральных прямоугольников, трапеций, Симпсона, трех восьмых. Остаточные члены (погрешности) интерполяционных квадратурных формул центральных прямоугольников, трапеций, Симпсона. Составные (локально интерполяционные) квадратурные формулы центральных прямоугольников, трапеций, Симпсона и их погрешности.
53. Понятие о наилучшем среднеквадратичном приближении по линейно независимой системе функций. Система линейных алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения. Дискретный вариант метода наименьших квадратов.
54. Понятие об одношаговых методах решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Явный метод Эйлера и его геометрический смысл. Погрешность одношагового метода на шаге и способ ее оценки. Накопленная погрешность одношагового метода в узле и ее связь с полной погрешностью одношагового метода в предыдущем узле. Формула для полной погрешности одношагового метода в узле, порядок точности метода. Метод разложения решения в ряд Тейлора. Методы Рунге-Кутты 2-го порядка точности. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности.
55. Понятие о многошаговом методе решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка (понятие о разностной схеме). Явные и неявные методы Адамса. Погрешность аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой. Построение разностных схем методом неопределенных коэффициентов. Условие устойчивости. Оценка погрешности устойчивого многошагового метода, порядок точности метода.
56. Простейшая сеточная аппроксимация двухточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Порядок аппроксимации дифференциальной задачи сеточной задачей на решении дифференциальной задачи. Алгоритм прогонки для решения системы сеточных уравнений. Понятие устойчивости сеточной задачи. Связь между сходимостью, аппроксимацией и устойчивостью.
57. Простейшие явные и неявные сеточные аппроксимации задач Коши для линейного уравнения переноса и уравнения теплопроводности в полосе. Проверка условия аппроксимации дифференциальной задачи сеточной задачей. Исследование устойчивости сеточных задач с помощью спектрального критерия. Сеточные аппроксимации задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольных и непрямоугольных областях, проверка условий аппроксимации.
58. Классификация сил. Связи. Реакции связей. Приведение системы сил к центру. Главный вектор и главный момент. Уравнения равновесия.
59. Способы задания закона движения точки. Траектория, скорость и ускорение точки. Круговое движение точки. Угловая скорость и угловое ускорение. Теорема Эйлера о поле скоростей твердого тела. Поле ускорений.

60. Мгновенный центр скоростей и мгновенный центр ускорений. Сложное движение точки и тела. Теорема Кориолиса. Уравнения движения и равновесия в относительном движении.
61. Уравнения движения. Теоремы движения точки. Первые интегралы. Движение под действием центральной силы. Относительное движение и относительное равновесие точки со связью.
62. Колебания материальной точки. Собственные колебания. Затухающие колебания. Вынужденные колебания материальной точки. Резонанс.
63. Основные теоремы динамики механической системы. Теорема об изменении количества движения. Движение центра масс.
64. Теорема об изменении кинетического момента. Теорема об изменении кинетической энергии. Теорема Кенига.
65. Кинематические и динамические уравнения Эйлера. Гироскопический момент.
66. Обобщенные координаты и силы. Общее уравнение динамики.
67. Уравнения Лагранжа второго рода.
68. Вариационные принципы. Принцип Гамильтона.
69. Феноменологический метод описания свойств реальной среды. Деформируемые среды. Деформируемые тела как подвижные материальные континуумы. Закон движения континуума. Лагранжев и Эйлеров способы описания движения сплошной среды. Индивидуальная и местная производные по времени. Траектории и линии тока. Система отсчета и сопутствующая система.
70. Полная система уравнений в случае упрочняющегося упруговязкопластического тела. Тензоры деформаций. Геометрический смысл ковариантных компонент тензоров деформаций. Тензоры Грина, Альманси, Коши. Уравнения совместности деформаций. Тензор скоростей деформаций. Уравнения совместности скоростей деформаций. Теорема Коши-Гельмгольца.
71. Уравнения неразрывности в переменных Эйлера и в переменных Лагранжа. Уравнения движения сплошной среды в интегральной форме. Условия на поверхности. Тензор напряжений. Главные значения тензора напряжений. Уравнения движения сплошной среды в дифференциальной форме в произвольной и декартовой системах координат. Уравнения Эйлера. Полная система уравнений движения идеальной жидкости. Законы Гука и Навье-Стокса в произвольной и декартовой системах координат, в главных осях.
72. Уравнения Навье-Стокса и уравнения Ламе; полные системы уравнений вязкой жидкости и линейной теории упругости. Кинетическая энергия и уравнения кинетической энергии для сплошной среды в интегральной и дифференциальной формах. Три типа задач теории упругости. Постановка задач теории упругости в перемещениях и в напряжениях. Уравнения Ламе. Уравнения Бельтрами-Митчелла. Теорема единственности. Задача Ламе.
73. Вариационные принципы. Вариационное уравнение равновесия Лагранжа. Вариационное уравнение Кастилиано. Метод Ритца. Метод Галёркина.
74. Плоская задача теории упругости. Плоское напряженное состояние. Плоская деформация. Математическая постановка плоской задачи. Функция напряжений Эри.
75. Понятие о динамических задачах МСС. Скорости распространения упругих волн.
76. Поверхность нагружения. Геометрическая интерпретация. Условия пластичности Треска и Мизеса. Ассоциированный закон пластического течения. Теоремы предельного равновесия. Полное решение. Плоская деформация. Соотношения Генки и Гейрингер. Кручение. Песчаная аналогия. Сложные пластические среды. Соотношения Прандтля-Рейса. Учет упрочнения, сжимаемости, вязкости.
77. Разрушение. Задача Эйлера. Статический и динамический методы. Теорема Дирихле-Лагранжа. Парадокс Николаи. Основы трехмерной линеаризованной теории устойчивости. Основные понятия о разрушении конструкций. Критерии разрушения:

энергетический, силовой, деформационный; разрушение с позиции теории устойчивости.

78. Основные соотношения теории пластин и оболочек. Краевой эффект. Поперечный изгиб прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек.
79. Диаграмма растяжения (сжатия). Поперечный изгиб балок. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил. Нормальные напряжения при изгибе. Перемещения при изгибе. Расчет на прочность и жесткость.
80. Теории прочности. Теория прочности Мора.
81. Основные определяющие уравнения. Начальные и граничные условия. Основы теории размерности и подобия. Критерии подобия. Числа Маха, Фруда, Рейнольдса и др. Уравнения равновесия. Закон Паскаля, закон Архимеда. Уравнения в форме Громеко-Лемба. Интеграл Бернулли. Теорема Жуковского. Элементарная теория сопла Лавалля. Течение вязких жидкостей. Движение Пуазейля в трубах. Понятие о пограничном слое. Уравнение Прандтля. Задача Блаузиса. Ламинарные и турбулентные движения. Уравнение Рейнольдса.
82. Законы термодинамики (первый, второй, третий). Идеальный газ. Уравнения Клапейрона-Менделеева. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотерма реального газа. Фазовые переходы. Распределение Максвелла. Вероятностный смысл энтропии. Формула Больцмана. Явление переноса. Законы Ньютона, Фурье, Фика.

#### 4. Список рекомендуемой литературы.

##### *Разделы 1 – 7.*

##### **а) основная литература:**

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Часть 1, 2. «Дрофа», 2004 г. (и другие издания).
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. «Наука», 1972 г., М.: изд-ва АСТ, Астрель, 2003. (и другие издания),
3. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1, 2, 3. «Физматлит», 2003 (и другие издания).
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, II, III. М.: ГИФМЛ, 1963; СПб: Невский диалект, 2001, 2002.
5. Гелбаум Б., Омстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967. М.: изд-во ЛКИ, 2007.
6. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I, II. М.: Фазис, 1997, 1998; МЦНМО, 2002. Издавался позднее.
7. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Т. I, II. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985; 2004.
8. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2004. Издавался позднее.
9. Лукомский С.Ф. Интегральное исчисление (функции одной переменной). Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2005.

##### **б) дополнительная литература:**

10. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
11. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1966.
12. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.



13. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. //Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», Том 1. М.: ВИНТИ, 1985.
14. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
15. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
17. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
18. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.;Л.: Гостехиздат, 1949.
19. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит. Т.1. 1953; Т.2. 1954.

### **Разделы 8 – 11**

#### **а) основная литература:**

20. Мещерский, Иван Всеволодович Задачи по теоретической механике : учебное пособие для студ. вузов, обуч. по техн. специальностям / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина .— Изд. 43-е, стер. — СПб. : Лань, 2005 .— 447,[1]с.

#### **б) дополнительная литература:**

21. Тарг, Семен Михайлович Краткий курс теоретической механики : Учебник для студ. вузов / С. М. Тарг .— 12-е изд., стер. — М. : Высшая школа, 2002 .— 416 с.
22. Яблонский, Александр Александрович Курс теоретической механики. Статика. Кинематика. Динамика : Учебное пособие для студ.вузов, обуч. по техн. специальностям / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова .— 9-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2004 .— 763,[1] с.

### **Разделы 12 - 19**

#### **а) основная литература:**

23. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев, – М. : Наука, 1992.
24. Беляев Н. М. Сборник задач по сопротивлению материалов / Н. М.Беляев – М. : Физматгиз, 1962.
25. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов / Ю. Н. Работнов. – М. : Физматлит, 1962.
26. Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1962.
27. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2-х т. / Л. И. Седов. – М. : Наука, 2004.

#### **б) дополнительная литература:**

28. Введение в МСС : методические указания к решению задач по курсу «Механика Сплошной Среды» : для студ. 3-4 курсов д/о и в/о специальностей 010500 и 010200 / сост. А. Н. Спорыхин, Ю. М. Мяснянкин, А. С. Чеботарев. – Воронеж, 2002. <URL:htp://www.main.vsu.ru/library/met/pmmf.html>.

29. Вариационные принципы и методы в механике деформируемых твердых тел : в 3-х ч. : учеб. метод. разработка / М. А. Артемов, Ю. М. Мяснянкин, Т. Д. Семькина. – Воронеж : ЛОП ВГУ, 2001.
30. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969.
31. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001.
32. Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин [и др.] – М. – Л., 1963.
33. Ландау Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – М. : Наука, 1988.
34. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2 – х т. / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1994.
35. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости / Дж. Бетчелор. – М. : Мир, 1973.
36. Гиргидов А. Д. Техническая механика жидкости и газа / А. Д. Гиргидов. – СПб. : Изд-во СПбГТУ, 2001.
37. Тимошенко С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Физматгиз, 1963.
38. Огибалов П. М. Пластины и оболочки / П. М. Огибалов, М. А. Колтунов. – М. : Изд-во МГУ, 1969.
39. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975.
40. Матвеев А. Н. Молекулярная физика / А. Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1961.
41. Ноздрев В. Ф. Курс статистической физики / В. Ф. Ноздрев, А. А. Сенкевич. – М. : Высш. шк., 1969.
42. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Наука, 1982.

#### 5. Образец контрольно – измерительного материала (КИМ)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
 ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
 ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
 «ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
 (ФГБОУ ВПО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ  
 председатель приемной комиссии

\_\_\_\_\_  
 \_\_.\_\_.20\_\_

Предмет: Прикладная математика и механика

#### Контрольно-измерительный материал № 7

1. Предел функции одной переменной. Вычисление пределов.
2. Теорема об изменении кинетической энергии.
3. Полная система уравнений в случае упрочняющегося упруговязкопластического тела.

Председатель предметной комиссии \_\_\_\_\_

#### 6. Вариант ответа на КИМ

### Предел функции одной переменной. Вычисление пределов.

Ответ на вопрос согласно источнику [4] из списка рекомендуемой литературы.

### Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Рассмотрим точку с массой  $m$ , перемещающуюся под действием приложенных к ней сил из положения  $M_0$ , где она имеет скорость  $\vec{v}_0$ , в положение  $M_1$ , где ее скорость равна  $\vec{v}_1$ . Для получения искомой зависимости обратимся ко второму закону Ньютона

$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$ , выражающему основной закон динамики. Проектируя обе части этого равенства на касательную  $M_t$  к траектории точки  $M$ , направленную в сторону движения, получим:

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}.$$

Стоящую слева величину касательного ускорения можно представить в виде

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dV}{ds} V.$$

В результате будем иметь:

$$mV \frac{dV}{ds} = \sum F_{k\tau}.$$

Умножив обе части этого равенства на  $ds$ , внесем  $m$  под знак дифференциала. Тогда, замечая, что  $\sum F_{k\tau} ds = dA_k$  где  $dA_k$  - элементарная работа силы  $F_k$  получим выражение теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$d \left( \frac{mV^2}{2} \right) = \sum dA_k.$$

Проинтегрировав теперь обе части этого равенства в пределах, соответствующих значениям переменных в точках  $M_0$  и  $M_1$ , найдем окончательно:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A(M_0, M_1).$$

Уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в конечном виде: изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

### Полная система уравнений вязкоупругопластического тела

1. Уравнения равновесия в напряжениях

$$\nabla_\beta \sigma_j^\beta = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_j^\beta$  – компоненты тензора напряжений,  $\nabla_\beta$  – ковариантная производная по  $\beta$  – ой координате.

2. Соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации

$$e_j^\beta = e^e_j^\beta + e^p_j^\beta, \quad (2)$$

где  $e_j^\beta$  – компоненты тензора деформаций,  $e^e_j^\beta$  – компоненты тензора упругих деформаций,  $e^p_j^\beta$  – компоненты тензора пластических деформаций.

3. Соотношения закона Гука, связывающие напряжения и упругие деформации,

$$S_j^\beta = 2Ge^e_j^\beta, \quad (3)$$

где  $S_j^\beta$  – компоненты девиатора тензора напряжений,  $G$  – модуль сдвига.

4. Уравнение поверхности нагружения

$$\left( S_j^\beta - ce^p_j^\beta - \eta \dot{e}^p_j^\beta \right) \left( S_j^\beta - ce^p_j^\beta - \eta \dot{e}^p_j^\beta \right) = 2k^2(X), \quad (4)$$

$X = \int_0^t \sqrt{\dot{e}^p_j^\beta \cdot \dot{e}^p_j^\beta} dt$ , где  $c$  – коэффициент упрочнения,  $\eta$  – коэффициент вязкости,  $\dot{e}^p_j^\beta$  – компоненты тензора скоростей пластических деформаций,  $k(X)$  – предел текучести,  $t$  – время.

Очевидно, если  $k(X) \neq 0$  и  $c \neq 0$ , то поверхность нагружения изотропно расширяясь, одновременно перемещается в пространстве напряжений, так как имеет место пластическое деформирование материала с изотропным и кинематическим упрочнением.

5. Соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$de^p_j^\beta = d\phi \left( S_j^\beta - ce^p_j^\beta - \eta \dot{e}^p_j^\beta \right), \quad (5)$$

где  $d\phi$  – скалярный положительный множитель.

6. Соотношения Коши, связывающие компоненты тензора деформаций  $e_j^\beta$  и вектора перемещений  $u_i$

$$e_j^\beta = \frac{1}{2} \left( \nabla^\beta u_j + \nabla^j u_\beta \right). \quad (6)$$

7. Граничные условия в напряжениях

$$\sigma_j^\beta n_\beta = P_j, \quad (7)$$

на части поверхности, где заданы усилия  $P_i$  ( $n_j$  – компоненты вектора нормали), и граничные условия для перемещений

$$u_i = u_i^*, \quad (8)$$

на части поверхности, где известны перемещения  $u_i^*$ .

8. Условия непрерывности вектора напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$[n_{\beta}\sigma_i^{\beta}] = [u_i] = 0. \quad (9)$$

Здесь и далее квадратные скобки обозначают разность значений выражений, заключенных в скобки, соответствующих упругой и пластической областям.

По индексам, повторяющимся два раза, предполагается суммирование от 1 до 3, если не оговорено противное. Нижний индекс, стоящий после запятой, указывает на дифференцирование по координате, соответствующей этому индексу.

Уравнения (1)-(9) при учете условия несжимаемости

$$e_{\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (10)$$

представляют систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние упрочняющегося упруговязкопластического тела.

### 9. Критерии оценки качества подготовки поступающего

75-100	Даны полные и правильные ответы на вопросы КИМа. Приведены доказательства и точные формулировки теорем.
50-75	Ответы в целом правильные, но имеются неточности в формулировках и доказательствах теорем.
40-50	Ответы приведены без доказательств теорем.
0-39	Ответы отсутствуют или они неправильные.

## Дополнение к программе вступительных испытаний

Согласно Правилам приема в ФГБУВО ВГУ (приложение 8) вступительный экзамен по дисциплине «**Прикладная математика и механика/магистры**» для абитуриентов, поступающих на направление **Механика и математическое моделирование**, проводится в дистанционном формате на портале <https://edu.vsu.ru/>.

Перед экзаменом проводится процедура идентификации абитуриента. Уполномоченное лицо предложит абитуриенту продемонстрировать в камеру соответствующие документы, в том числе его паспорт, а также рабочий стол. Присутствие посторонних на рабочем месте абитуриента, сдающего экзамен, недопустимо.

Экзамен проводится в виде теста. Для экзаменуемого будет предложено восемь вопросов, на два из которых необходимо дать письменный ответ (эссе). Остальные вопросы с выбором ответа, которые проверяются автоматически.

В письменном ответе должна содержаться максимально полная информация ответа на вопрос, которая включает: качественную иллюстрацию, описание или постановку проблемы, формулировки определений, вывод соотношений, пояснения и т.д. После написания письменного ответа его нужно сфотографировать или отсканировать и после этого прикрепить полученный файл в соответствующее место на странице теста. **Качество изображения должно позволять членам комиссии понять написанное.**

Задания представлены по темам: теоретическая и прикладная механика, механика сплошных сред, прикладная математика. На прохождение теста отводится 90 минут.

Максимальное число баллов, которое может получить абитуриент, пройдя тест, равно **100** баллам. Правила оценивания письменных вопросов приведены в «**Критерии оценок**».

### Критерии оценок

Критерии оценок	Снимаются баллы (из максимально возможного)	
Задания 1-6 (с выбором ответа) проверяются автоматически		
Задания 1,3,5 - максимальный балл 5 Задания 2,4,6 - максимальный балл 10	Задания 1,3,5	Задания 2,4,6
Выбран правильный ответ	0	0
Указан неправильный ответ	5	10
Задания 7,8 (эссе) проверяются членами предметной комиссии		
в задании 7 максимальный балл 25, в задании 8 максимальный балл 30	Задание 7	Задание 8
Верно приведена формулировка определения (теоремы), вид основных формул, указанных в вопросе. Правильно представлены иллюстрации и дано описание механических моделей, указанных в вопросе. Корректно проведено доказательство (вывод основных соотношений)	0	0
Неверно приведена формулировка определения (теоремы), вид основных формул, указанных в вопросе.	9	10
Неправильно представлены иллюстрации и дано описание	8	10

механических моделей		
Некорректно проведено доказательство (вывод основных соотношений)	8	10
В целом верно приведена формулировка определения (теоремы), вид основных формул, указанных в вопросе, но имеются незначительные неточности.	от 0 до 5	от 0 до 5
В целом верно представлены иллюстрации и дано описание механических моделей, но имеются незначительные неточности.	от 0 до 4	от 0 до 5
В целом верно проведено доказательство (вывод основных соотношений), но имеются незначительные неточности.	от 0 до 4	от 0 до 5